

Path Integrals y Propagador de Feynman

Dinámica Cuántica como una Suma Infinita de Historias

Alexis F. Espinoza Quinteros

Academia Atómica, UTalca

29 de marzo de 2026

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

1933: La Semilla de Dirac

En 1933, P.A.M. Dirac publicó un artículo titulado "*The Lagrangian in Quantum Mechanics*".

Dirac notó que la mecánica cuántica de Heisenberg y Schrödinger estaba basada enteramente en el **Hamiltoniano**.

Él se preguntó si existía una formulación análoga basada en el **Lagrangiano** (y por ende, en el Principio de Mínima Acción), que es más natural para la relatividad.

Llegó a una conclusión críptica: el operador de evolución "corresponde a" la exponencial de la acción:

$$\langle q_t | q_T \rangle \sim \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_T^t L dt \right] \quad (1)$$

316

68

P. A. M. Dirac,

T to t . In the quantum theory the q_t, p_t will still be connected with the q_T, p_T by a contact transformation and there will be a transformation function $\langle q_t | q_T \rangle$ connecting the two representations in which the q_t and the q_T are diagonal respectively. The work of the preceding section now shows that

$$\langle q_t | q_T \rangle \text{ corresponds to } \exp \left[i \int_T^t L dt / \hbar \right], \quad (8)$$

where L is the Lagrangian. If we take T to differ only infinitesimally little from t , we get the result

$$\langle q_{t+dt} | q_t \rangle \text{ corresponds to } \exp [iL dt / \hbar]. \quad (9)$$

The transformation functions in (8) and (9) are very fundamental things in the quantum theory and it is satisfactory to find that they have their classical analogues, expressible simply in terms of the Lagrangian. We have here the natural extension of the well-known result that the phase of the wave function corresponds to Hamilton's principle func-

Figura: Artículo original de Dirac. [1]

1948: Feynman resuelve el rompecabezas

Durante una charla casual, el físico Herbert Jehle le mencionó a Richard Feynman el artículo de Dirac. Feynman, obsesionado con la acción clásica, se preguntó: **¿Qué significa exactamente “corresponde a”?**

REVIEWS OF MODERN PHYSICS

VOLUME 20, NUMBER 2

APRIL, 1948

Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics

R. P. FEYNMAN

Cornell University, Ithaca, New York

Non-relativistic quantum mechanics is formulated here in a different way. It is, however, mathematically equivalent to the familiar formulation. In quantum mechanics the probability of an event which can happen in several different ways is the absolute square of a sum of complex contributions, one from each alternative way. The probability that a particle will be found to have a path $x(t)$ lying somewhere within a region of space time is the square of a sum of contributions, one from each path in the region. The contribution from a single path is postulated to be an exponential whose (imaginary) phase is the classical action (in units of $\hbar$) for the path in question. The total contribution from all paths reaching x, t from the past is the wave function $\psi(x, t)$. This is shown to satisfy Schroedinger's equation. The relation to matrix and operator algebra is discussed. Applications are indicated, in particular to eliminate the coordinates of the field oscillators from the equations of quantum electrodynamics.

Feynman se dio cuenta: Para ir de A a B, la partícula **no** toma una sola trayectoria.

Feynman postuló que la amplitud total es la **suma sobre todos los caminos posibles**, naciendo así su paper de 1948: *"Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics"*.

Figura: El salto conceptual de Feynman. [2]

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico**
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

Mecánica Clásica y la Acción

- **Mecánica Clásica:** Una partícula sigue **una única** trayectoria $x_{cl}(t)$.
- Está determinada por el **Principio de Mínima Acción** ($\delta S = 0$), donde la Acción S es la integral del Lagrangiano $L = T - V$:

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt \quad (2)$$

Mecánica Clásica y la Acción

- **Mecánica Clásica:** Una partícula sigue **una única** trayectoria $x_{cl}(t)$.
- Está determinada por el **Principio de Mínima Acción** ($\delta S = 0$), donde la Acción S es la integral del Lagrangiano $L = T - V$:

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt \quad (2)$$

Acciones Clásicas de Referencia (las usaremos luego):

- *Partícula Libre* ($V = 0$):

$$S_{cl} = \frac{m(x_f - x_i)^2}{2(t_f - t_i)} \quad (3)$$

- *Oscilador Armónico* ($V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, con $T = t_f - t_i$):

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_f^2 + x_i^2) \cos(\omega T) - 2x_f x_i] \quad (4)$$

Mecánica Cuántica y el Enfoque de Feynman

- **Mecánica Cuántica (Schrödinger):** Una partícula es descrita por una función de onda $\psi(x, t)$ que evoluciona determinísticamente vía:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (5)$$

Mecánica Cuántica y el Enfoque de Feynman

- **Mecánica Cuántica (Schrödinger):** Una partícula es descrita por una función de onda $\psi(x, t)$ que evoluciona determinísticamente vía:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (5)$$

Feynman propuso reconciliar la visión cuántica con el principio de acción clásico postulando que el sistema cuántico **toma todos los caminos posibles** simultáneamente.

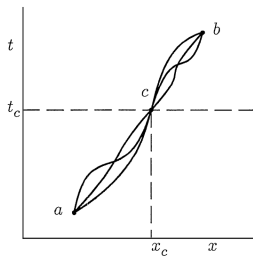


Figura: Suma sobre historias. [3]

La Intuición: Interferencia de Fases

¿Cómo emerge la única trayectoria clásica de infinitas trayectorias cuánticas?

- Cada camino contribuye con la **misma amplitud** (magnitud 1) a la probabilidad total, pero con una **fase diferente** dictada por su acción: $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$.
- **Caminos alejados de la trayectoria clásica:** La acción S varía rápidamente de un camino a otro. Las fases oscilan violentamente ($\hbar$ es muy pequeño) apuntando en todas direcciones $\Rightarrow$ **Interferencia Destructiva**.
- **Caminos cercanos a la trayectoria clásica:** Por el principio de Hamilton, $\delta S = 0$. Los caminos vecinos tienen casi la misma acción y, por tanto, casi la misma fase $\Rightarrow$ **Interferencia Constructiva**.

En el límite macroscópico ($S \gg \hbar$), la cancelación es tan severa que **solo** observamos el haz infinitesimal alrededor de la trayectoria clásica.

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green**
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

Teoría General: ¿Qué es una Función de Green?

En matemáticas, si tenemos un operador diferencial lineal L y queremos resolver una ecuación de la forma $Lu(x) = f(x)$, introducimos la **Función de Green** $G(x, x')$.

G representa la respuesta del sistema a un “impulso puntual” o perturbación en x' :

$$L G(x, x') = \delta(x - x') \quad (6)$$

Teoría General: ¿Qué es una Función de Green?

En matemáticas, si tenemos un operador diferencial lineal L y queremos resolver una ecuación de la forma $Lu(x) = f(x)$, introducimos la **Función de Green** $G(x, x')$.

G representa la respuesta del sistema a un “impulso puntual” o perturbación en x' :

$$L G(x, x') = \delta(x - x') \quad (6)$$

El Poder de Superposición: Dado que la fuente $f(x)$ se puede escribir como una suma continua de impulsos ($f(x) = \int f(x')\delta(x - x')dx'$), la solución general del sistema es la superposición de las respuestas:

$$u(x) = \int G(x, x')f(x')dx' \quad (7)$$

Esta herramienta es universal: se usa en electrostática ($\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$), propagación del calor y acústica.

El Operador $U(t)$ y el Propagador de Feynman

En mecánica cuántica, queremos evolucionar una función de onda:

$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i)|\psi(t_i)\rangle$. Con un Hamiltoniano constante, el operador abstracto es $U(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i)}$.

Feynman definió el **Propagador o Núcleo** $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ como el *elemento de matriz* (el producto escalar) de este operador en la base de posición:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | U(t_f, t_i) | x_i \rangle \quad (8)$$

Físicamente, es la amplitud de probabilidad de que una partícula viaje de (x_i, t_i) a (x_f, t_f) . La función de onda evoluciona mediante:

$$\psi(x_f, t_f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \quad (9)$$

Notar la similitud: La ecuación anterior tiene la estructura exacta de la solución mediante Funciones de Green

La Relación Exacta con la Función de Green Cuántica

Para la ecuación de Schrödinger, el operador diferencial es $L = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}$. Su Función de Green $G(x, t; x', t')$ obedece a un impulso tanto en el espacio como en el tiempo:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) G(x, t; x', t') = \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (10)$$

La Relación Exacta con la Función de Green Cuántica

Para la ecuación de Schrödinger, el operador diferencial es $L = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}$. Su Función de Green $G(x, t; x', t')$ obedece a un impulso tanto en el espacio como en el tiempo:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) G(x, t; x', t') = \delta(x - x')\delta(t - t') \quad (10)$$

¿Cómo se relaciona G con el Propagador de Feynman K ? Exigimos

causalidad: el sistema solo evoluciona hacia el futuro. Añadimos la función escalón de Heaviside $\Theta(t - t')$. La relación exacta es:

$$G(x, t; x', t') = -\frac{i}{\hbar} \Theta(t - t') K(x, t; x', t') \quad (11)$$

El factor $-i/\hbar$ es necesario porque al aplicar la derivada temporal ∂_t a la función escalón Θ , se genera la $\delta(t - t')$ que exige la definición de Green.

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos**
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

Discretización del Tiempo

El método clave es dividir el intervalo de tiempo $(t_f - t_i)$ en N pequeños pasos ϵ :

$$\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}, \quad t_j = t_i + j\epsilon \quad (12)$$

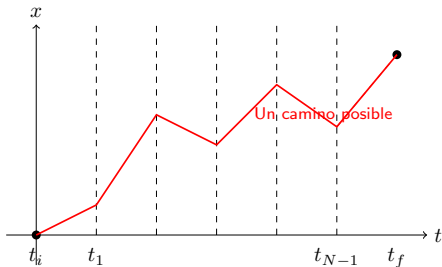


Figura: Esquema estándar.

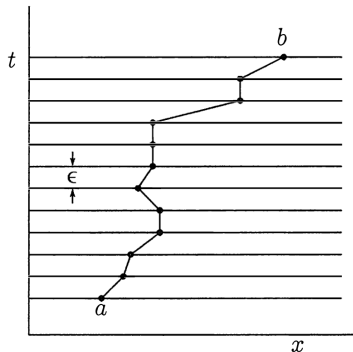


Figura: Discretización original de Feynman.
Ejes invertidos. [3]

Uso de Relaciones de Completitud

Usamos la propiedad del operador de evolución. El viaje total es el producto de N saltos infinitesimales:

$$U(t_f, t_i) = U(t_N, t_{N-1})U(t_{N-1}, t_{N-2}) \dots U(t_1, t_0) \quad (13)$$

Uso de Relaciones de Completitud

Usamos la propiedad del operador de evolución. El viaje total es el producto de N saltos infinitesimales:

$$U(t_f, t_i) = U(t_N, t_{N-1})U(t_{N-1}, t_{N-2}) \dots U(t_1, t_0) \quad (13)$$

Insertamos $N - 1$ relaciones de completitud de la posición, $\int dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{I}$, entre cada par de operadores:

$$\langle x_N | U(t_N, t_0) | x_0 \rangle = \int \dots \int \langle x_N | U(t_N, t_{N-1}) | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_1 | U(t_1, t_0) | x_0 \rangle dx_{N-1} \dots dx_1 \quad (14)$$

Hemos descompuesto el propagador macroscópico en un producto de muchos propagadores infinitesimales: $K_\epsilon = \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \epsilon} | x_j \rangle$.

El Propagador Infinitesimal (Derivación Limpia)

Consideremos el Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$. Para $\epsilon \rightarrow 0$, podemos separar la exponencial (aproximación de Trotter):

$$e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} \approx e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(\hat{x})} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} \quad (15)$$

El Propagador Infinitesimal (Derivación Limpia)

Consideremos el Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$. Para $\epsilon \rightarrow 0$, podemos separar la exponencial (aproximación de Trotter):

$$e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} \approx e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(\hat{x})} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} \quad (15)$$

Evalúamos el elemento de matriz $\langle x_{j+1} | \dots | x_j \rangle$. El potencial actúa sobre $|x_{j+1}\rangle$ (o $|x_j\rangle$) sacando su autovalor escalar $V(x_j)$:

$$\langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{H}} | x_j \rangle \approx e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_j)} \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} | x_j \rangle \quad (16)$$

El Propagador Infinitesimal (Derivación Limpia)

Consideremos el Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$. Para $\epsilon \rightarrow 0$, podemos separar la exponencial (aproximación de Trotter):

$$e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} \approx e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(\hat{x})} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} \quad (15)$$

Evaluamos el elemento de matriz $\langle x_{j+1} | \dots | x_j \rangle$. El potencial actúa sobre $|x_{j+1}\rangle$ (o $|x_j\rangle$) sacando su autovalor escalar $V(x_j)$:

$$\langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{H}} | x_j \rangle \approx e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_j)} \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} | x_j \rangle \quad (16)$$

Para resolver la parte cinética, insertamos la completitud del momento $\int dp |p\rangle \langle p| = \mathbb{I}$ y usamos $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$:

$$K_\epsilon \approx e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_j)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip_j(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} e^{-\frac{i\epsilon}{2m\hbar} p_j^2} \quad (17)$$

La Integral de Gauss: El Bloque de Construcción

Agrupando la integral sobre el momento p_j :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\epsilon}{2m\hbar} p_j^2 + \frac{i(x_{j+1}-x_j)}{\hbar} p_j} \quad (18)$$

Esta integral es puramente Gaussiana, de la forma $\int e^{-au^2+bu} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$.

Este paso es el corazón analítico de la formulación. [4] Al resolverla, emerge mágicamente la velocidad al cuadrado $\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon}\right)^2$ y un factor pre-exponencial:

Propagador en un instante ϵ

$$K_\epsilon = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} \quad (19)$$

El Resultado Continuo: La Medida y la Acción

Sustituyendo el resultado infinitesimal en las $N - 1$ integrales de posición.

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \cdots \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} dx_{N-1} \cdots dx_1 \quad (20)$$

El Resultado Continuo: La Medida y la Acción

Sustituyendo el resultado infinitesimal en las $N - 1$ integrales de posición.

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \cdots \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} dx_{N-1} \cdots dx_1 \quad (20)$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la suma en el exponente se convierte rigurosamente en la Acción Clásica S :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt = S[x(t)] \quad (21)$$

Agrupamos los infinitos diferenciales dx_i y la constante infinita en la Medida de Integración Funcional $\mathcal{D}[x(t)]$:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (22)$$

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas**
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

El Camino Clásico como Eje Central

Podemos reescribir matemáticamente CUALQUIER trayectoria cuántica $x(t)$ como el camino clásico exacto $x_{cl}(t)$ más una fluctuación o “ruido cuántico” $\eta(t)$:

$$x(t) = x_{cl}(t) + \eta(t) \quad (23)$$

Como todos los caminos empiezan y terminan en los mismos puntos, la fluctuación debe ser nula en los extremos: $\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0$.

El Camino Clásico como Eje Central

Podemos reescribir matemáticamente CUALQUIER trayectoria cuántica $x(t)$ como el camino clásico exacto $x_{cl}(t)$ más una fluctuación o “ruido cuántico” $\eta(t)$:

$$x(t) = x_{cl}(t) + \eta(t) \quad (23)$$

Como todos los caminos empiezan y terminan en los mismos puntos, la fluctuación debe ser nula en los extremos: $\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0$. Si expandimos la acción S en serie de Taylor funcional alrededor de x_{cl} :

$$S[x_{cl} + \eta] = S[x_{cl}] + \underbrace{\delta S[x_{cl}]}_{=0} + \frac{1}{2} \delta^2 S[\eta] + \dots \quad (24)$$

¡El término lineal se anula gracias al Principio de Mínima Acción! La integral de caminos se factoriza:

$$K = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}[\eta] e^{\frac{i}{\hbar} (\text{Términos cuadráticos y sup. en } \eta)} \quad (25)$$

Potenciales Cuadráticos y Fórmula de Van Vleck

Si el potencial $V(x)$ es a lo sumo cuadrático (partícula libre, oscilador armónico), la expansión de S se trunca exactamente en el segundo orden. La integral funcional sobre $\eta(t)$ es otra gaussiana, y su resultado es un factor preexponencial F que depende solo del tiempo total $T = t_f - t_i$.

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = F(T) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_f, x_i, T)} \quad (26)$$

Potenciales Cuadráticos y Fórmula de Van Vleck

Si el potencial $V(x)$ es a lo sumo cuadrático (partícula libre, oscilador armónico), la expansión de S se trunca exactamente en el segundo orden. La integral funcional sobre $\eta(t)$ es otra gaussiana, y su resultado es un factor preexponencial F que depende solo del tiempo total $T = t_f - t_i$.

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = F(T) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_f, x_i, T)} \quad (26)$$

Fórmula de Van Vleck - Pauli - Morette [4]: Nos dice que $F(T)$ está ligada a cómo varía la acción clásica al cambiar los extremos (una segunda derivada cruzada):

$$F(T) = \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_f \partial x_i}} \quad (27)$$

Fórmula de Gelfand - Yaglom

La fórmula de Van Vleck requiere calcular primero la acción clásica exacta. Gelfand y Yaglom propusieron un método alternativo resolviendo una simple **ecuación diferencial ordinaria**.

El factor de fluctuación es $F(T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar f(T)}}$, donde la función $f(t)$ obedece la ecuación clásica para variaciones (Ecuación de Jacobi), evaluada con condiciones iniciales específicas:

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} - V''(x_{cl})f(t) = 0, \quad \text{con } f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1 \quad (28)$$

Fórmula de Gelfand - Yaglom

La fórmula de Van Vleck requiere calcular primero la acción clásica exacta. Gelfand y Yaglom propusieron un método alternativo resolviendo una simple **ecuación diferencial ordinaria**.

El factor de fluctuación es $F(T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar f(T)}}$, donde la función $f(t)$ obedece la ecuación clásica para variaciones (Ecuación de Jacobi), evaluada con condiciones iniciales específicas:

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} - V''(x_{cl})f(t) = 0, \quad \text{con } f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1 \quad (28)$$

Ejemplo Rápido: Partícula Libre ($V = 0 \implies V'' = 0$)

La ecuación diferencial se reduce a $\ddot{f} = 0$, cuya solución es una recta $f(t) = At + B$. Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos simplemente $f(t) = t$. Al evaluar en el tiempo final T , el factor queda:

$$F(T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \quad \text{Recuperamos el mismo prefactor libre que teníamos}$$

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales**
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

El Propagador de la Partícula Libre

Recuperemos la acción clásica de la partícula libre que vimos antes:

$$S_{cl} = \frac{m(x_f - x_i)^2}{2(t_f - t_i)} \quad (29)$$

Aplicando la fórmula de Van Vleck, la segunda derivada cruzada $\partial_{x_f} \partial_{x_i} S_{cl}$ da simplemente $-m/(t_f - t_i)$. Sustituyendo, obtenemos el propagador exacto:

Propagador Partícula Libre

$$K_{libre} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} \exp \left\{ \frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right\} \quad (30)$$

Notar cómo al hacer el límite ($t_f \rightarrow t_i$), la gaussiana compleja se contrae infinitamente, recuperando la condición inicial de la Función de Green:

$$K \rightarrow \delta(x_f - x_i).$$

El Propagador del Oscilador Armónico

Con la acción clásica del oscilador armónico y evaluando el determinante de las fluctuaciones cuánticas $\eta(t)$, el propagador analítico es:

$$K_{osc} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega T)}} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega T)} \left[(x_f^2 + x_i^2) \cos(\omega T) - 2x_f x_i \right] \right\} \quad (31)$$

Consistencia Física: Si tomamos el límite de frecuencia cero ($\omega \rightarrow 0$), sabiendo que $\sin(\omega T) \approx \omega T$ y $\cos(\omega T) \approx 1$, la ecuación colapsa instantánea y perfectamente en el propagador de la partícula libre. [4]

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger**
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

El Objetivo Final

Para cerrar el círculo de equivalencia, se demostrará que la propagación infinitesimal de la función de onda dictada por Feynman recupera la Ecuación de Schrödinger.

$$\psi(x, t + \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t + \epsilon; x', t) \psi(x', t) dx' \quad (32)$$

Sustituimos el K_{ϵ} de Feynman:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{m(x-x')^2}{2\epsilon^2} - V\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right]} \psi(x', t) \quad (33)$$

Cambio de Variable y Expansión

Hacemos el cambio de variable espacial $x' = x + \eta$. (Nota: esta η es una coordenada de integración, no la fluctuación temporal anterior).

$$\psi(x, t + \epsilon) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x + \frac{\eta}{2})} \psi(x + \eta, t) \quad (34)$$

Cambio de Variable y Expansión

Hacemos el cambio de variable espacial $x' = x + \eta$. (Nota: esta η es una coordenada de integración, no la fluctuación temporal anterior).

$$\psi(x, t + \epsilon) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x + \frac{\eta}{2})} \psi(x + \eta, t) \quad (34)$$

Como el término $e^{im\eta^2/2\hbar\epsilon}$ oscila infinitamente rápido para η grande, solo las regiones donde η es pequeña contribuyen. Expandimos en series de Taylor:

En tiempo (ϵ):

$$\psi(t + \epsilon) \approx \psi + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (35)$$

En espacio (η):

$$\psi(x + \eta) \approx \psi + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (37)$$

$$e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V} \approx 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x) \quad (36)$$

Uso de Integrales de Gauss y Resultado

Sustituyendo las series y multiplicando términos hasta orden $O(\epsilon)$, el lado derecho requiere resolver integrales gaussianas de la forma $\int \eta^n e^{im\eta^2/2\hbar\epsilon} d\eta$:

- Para $n = 0$: Da $\sqrt{2\pi i\hbar\epsilon/m}$, que cancela exactamente el prefactor.
- Para $n = 1$: Da 0, porque la función es impar.
- Para $n = 2$: Da $\left(\frac{i\hbar\epsilon}{m}\right) \times (\text{prefactor})$.

Uso de Integrales de Gauss y Resultado

Sustituyendo las series y multiplicando términos hasta orden $O(\epsilon)$, el lado derecho requiere resolver integrales gaussianas de la forma $\int \eta^n e^{im\eta^2/2\hbar\epsilon} d\eta$:

- Para $n = 0$: Da $\sqrt{2\pi i\hbar\epsilon/m}$, que cancela exactamente el prefactor.
- Para $n = 1$: Da 0, porque la función es impar.
- Para $n = 2$: Da $\left(\frac{i\hbar\epsilon}{m}\right) \times (\text{prefactor})$.

Al reemplazar estos resultados y cancelar $\psi(x, t)$ en ambos lados, obtenemos:

$$\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{i\hbar\epsilon}{m} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x) \psi \quad (38)$$

Dividiendo todo por ϵ y multiplicando por $i\hbar$, emerge el resultado:

Ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi \quad (39)$$

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas**
- 9 Bibliografía

Un Nuevo Marco para la Cuántica

- **Equivalencia:** El propagador funcional de Feynman no es una teoría alternativa, es rigurosamente equivalente a la mecánica de Schrödinger y Heisenberg.
- **Límite Clásico Entendido:** La mecánica clásica emerge de la cuántica puramente por interferencia de fases.
- **Generalización y QFT:** Este marco centrado en el Lagrangiano es infinitamente superior para tratar la invariancia de Lorentz, haciéndolo el pilar de la Teoría Cuántica de Campos moderna y el Modelo Estándar.

- 1 Un Poco de Historia: Dirac y Feynman
- 2 Clásico vs. Cuántico
- 3 Evolución Temporal y Función de Green
- 4 La Construcción de la Integral de Caminos
- 5 Fluctuaciones y Fórmulas Exactas
- 6 Ejemplos Fundamentales
- 7 Deducción de la Ecuación de Schrödinger
- 8 Conclusiones y Perspectivas
- 9 Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *The Lagrangian in Quantum Mechanics*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 1933.
- [2] R. P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics, 1948.
- [3] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Path Integrals and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1965.
- [4] Javier García, “Curso Mecánica Cuántica (a lo Feynman)”. YouTube Video Playlist.

...y gracias por su atención.